

M. DUCHESNE

M. DUCHESNE



ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

A European Journal

Reprint from
Vol. 13 (1971) pp. 226-231
Printed in Germany

Étude électrographique du centre de l'amas globulaire M 13. I

A. B. Bijaoui

Published by Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York
on behalf of the Board of Directors

Étude électronographique du centre de l'amas globulaire M 13. I*

A. B. BIJAOUÏ

Observatoire de Paris et Observatoire de Haute Provence

Reçu le 29 janvier, révisé le 25 mars 1971

* Ce travail représente l'article principal de la thèse que M. A. Bijaoui a présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour l'obtention du titre de Docteur ès Sciences Physiques le 25 mars 1971, devant un jury composé de M. Nahon, Président, MM. Delhayé, Lallemant et Duchesne, examinateurs. Le No. d'enregistrement au CNRS est AO 5459.

Electronographic Study of the Globular Cluster M 13. I

The photometric properties of the electronic camera (linearity, no threshold, no emulsion diffusion) enable us to study the structure of the central part of globular clusters with increased accuracy. We use a statistical method based on a posteriori probabilities in order to maximize the information. Some properties of this method are studied: the likelihood test in the case of a Bernoulli process, the estimation of unknown parameters and their r.m.s. errors the discrimination condition for two laws, the condition under which a set of distributions corresponds to the same law, and the possibility of successive subdivisions. These different methods are used to study the distribution of the central stars in the globular cluster M 13.

Two laws are examined: the isothermal law and Plummer's law. The agreement is good for both of them, which shows that the sample is too small to examine other, more complicated laws. The central density is determined; its value is of the order of several hundred $M_{\odot}/\text{pc}^3$, a typical value for globular clusters.

We determine the central ellipticity; a slight ellipticity exists, but a circularly symmetric distribution also fits the observations.

We study the hypothesis under which the stars are statistically distributed in accordance with a Bernoulli process (independent events). We divide the central part into squares of different sizes, and for each size, we make the likelihood test in the case of Plummer's law. In this way we show that a weak stellar correlation exists.

Key words: globular clusters — stellar statistics

1. Introduction

Les propriétés de la caméra électronique (Lallemand et Duchesne, 1951) modifient de façon importante les possibilités de l'observation astronomique. Indépendamment de son gain en sensibilité par rapport à la photographie classique (Cosson, 1964; Alpern *et al.*, 1966), elle permet d'allier, dans une large mesure les avantages de la plaque photographique et du photomultiplicateur pour la détermination des magnitudes stellaires (Lallemand, 1967; Bijaoui et Dantel, 1970).

La mise en place de la caméra électronique au foyer Newton du télescope de 193 cm de l'Observatoire de Haute Provence (Wlérick, 1969), nous a permis d'entreprendre un programme d'observations sur les amas globulaires. La non-existence de seuil, la linéarité de la réponse (Vernier, 1958; Duchesne et Bijaoui, 1970), la réponse spectrale indépendante du flux et l'absence de diffusion photographique en font

un récepteur particulièrement bien adapté à l'étude du centre de ces objets.

Kron *et al.* (1967) ont montré qu'à partir de clichés électrographiques on peut retrouver, pour la loi de répartition du flux lumineux en fonction de la distance au centre, les résultats qu'ils avaient obtenus précédemment en collaboration avec Mayall (Kron et Mayall, 1960) à l'aide de photomultiplicateur. Le récepteur se prête donc à une analyse très fine de ces objets.

Nous avons utilisé pour cette étude, 7 clichés du centre de M 13 pris en avril 1967, en collaboration avec Wlérick au foyer Newton du télescope de 193 cm de l'Observatoire de Haute Provence (cf Fig.); la bande passante correspond au V du système $U-B-V$ de Johnson-Morgan filtre Schott GG 14 2 mm + cellule SbCs_3 . Les temps de pose sont répartis entre 5 s et 3 m, sur l'émulsion Ilford G5 avec une tension d'accélération de 25 kV.

Pour déterminer les magnitudes stellaires, nous avons utilisé la méthode de Schilt (Lallemand *et al.*,

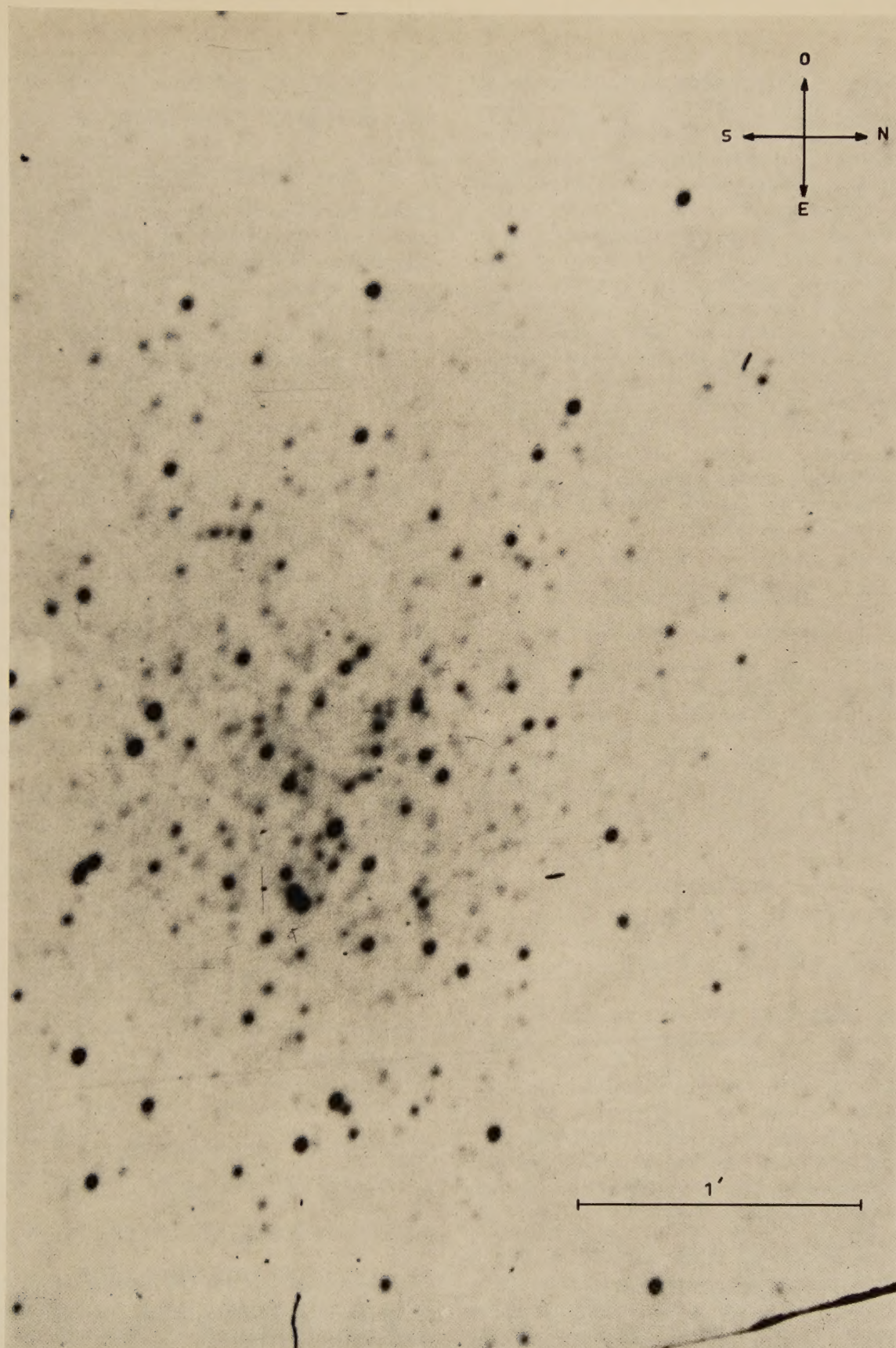


Fig. 1. Photographie du centre de l'amas M13 obtenue avec la caméra électronique. Emulsion Ilford G5, tension d'accélération 25 kV, filtre Schott GG14 cellule SbCs_3 temps de pose 1 m.

1966). Dans un précédent article (Bijaoui et Dantel, 1970), nous avons analysé les différentes erreurs intervenant dans la méthode; non linéarité, élimination du fond de ciel, effet des différentes aberrations; nous avons comparé les mesures faites avec différents temps d'exposition et nous avons montré que la précision sur un cliché était d'environ 0,02 mag. Nous avons utilisé la méthode de Walker et Kron (1967) et la même précision a été obtenue.

Notre étude sera répartie en deux articles; dans le premier nous étudierons la distribution des étoiles du centre de l'amas indépendamment de leur magnitude; répartition ellipticité, groupements; dans le second nous examinerons les variations de la distribution des étoiles en fonction de la magnitude.

Afin d'utiliser au mieux l'information et compte tenu de l'échantillonnage restreint que nous possédons, nous utiliserons une méthode statistique basée sur les probabilités a posteriori.

II. Méthode statistique

a) Principe de la méthode

Considérons une alternative généralisée, avec K éléments p_i et N épreuves, les p_i étant tels que $\sum p_i = 1$. Dans un espace E à K dimensions.

On considère le point p de coordonnées les différents p_i . Nous observons des n_i correspondants aux p_i ; nous appellerons n le point représentatif dans le même espace. Nous cherchons à caractériser les points p de E compatibles avec l'observation de n .

L'alternative généralisée nous donne la loi $Pr(n/p)$, il nous faut déterminer la loi $P(n/p)$. Par l'axiome de Bayes nous avons;

$$P(n/p) = \frac{P(p) P(n/p)}{\int_E P(p) P(n/p) dp}$$

$P(p)$ étant la loi de probabilité a priori de p . Généralement cette loi est inconnue et on a recours à des estimateurs sans chercher à déterminer la loi de probabilité de l'inconnu. La théorie des communications de Shannon *et al.* (1948) permet de déterminer cette loi. En effet, il importe de ne pas introduire par le choix de $P(p)$ des informations que nous ne possédons pas; dans le cas présent a priori les seules contraintes que l'on ait:

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{avec} \quad \sum p_i = 1$$

(domaine de D de E)

$$\text{et} \int_D P(p) dp = 1$$

A toute loi $P(p)$ est associée son indétermination H :

$$H = - \int_D P(p) \log P(p) dp$$

H est maximum pour $P = (K - 1)!$

Si nous choisissons une autre loi pour P , son indétermination H' sera plus faible, ce qui signifie que nous nous donnons une information $H - H'$ a priori, sans aucune justification. La loi a priori que l'on choisira doit donc être nécessairement celle qui maximise l'indétermination a priori sur la variable.

Dans le domaine D de l'espace E , il y aura une densité de probabilité en chaque point

$$P(p/n) = \frac{\Gamma(N + K)}{\pi(\Gamma(n_i + 1))} \pi p_i^{n_i}$$

$\Gamma(x)$ étant la fonction eulérienne de seconde espèce.

Il nous faut caractériser par un estimateur les points de D compatibles avec l'observation. Dans le cas d'une loi normale, l'estimateur correspond à la distance au point observé (test du χ^2); ceci provient de l'expression simple de la loi normale; les surfaces isoprobables sont des sphères centrées au point observé. Dans le cas qui nous préoccupe, les surfaces isoprobables ont une forme beaucoup plus complexe: alors que dans le cas de la loi normale, le paramètre qui caractérise la surface pouvait être le rayon, ici le seul paramètre adapté, est la densité de probabilité ou plus simplement $\log P(p/n)$.

Etant donné une distribution de p_i , celle-ci sera plausible si $\log P(p/n)$ est du même ordre de grandeur $E[\log P(p/n)]$ compte tenu du $\sigma^2(\log P(p/n))$.

b) Test de vraisemblance

Comme $\Gamma(N + K)/\pi \Gamma(n_i + 1)$ est indépendant des p_i , il suffit de déterminer $E(\sum n_i \log p_i)$. Si

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Nous obtenons:

$$\sum n_i \log p_i \sim \sum n_i \psi(n_i + 1) - N \psi(N + K) \quad \text{avec}$$

$$\sigma^2(\sum n_i \log p_i) = \sum n_i^2 \psi'(n_i + 1) - N^2 \psi'(N + K)$$

$$\begin{aligned} \text{l'expression } R &= \sum n_i \log \frac{n_i}{N} - (\sum n_i \psi(n_i + 1) \\ &- N \psi(N + K)). \quad \text{Soit } R = \sum n_i (\log n_i - \psi(n_i + 1)) \\ &- (N \log N - \psi(N + K)) \end{aligned}$$

est toujours positive et joue le même rôle que le résidu pour une loi normale.

c) Cas d'une loi paramétrée $p_i(a_n)$

Dans ce cas nous appliquons le principe de maximum de vraisemblance:

Soit $\sum n_i \log p_i(a_n)$ maximum, avec $\sum p_i(a_n) = 1$. La variance de a_n est égale à:

$$\sigma^2(a_n) = \frac{4}{(N+1) \int_0^1 \left(\frac{\partial p}{\partial a_n} \right)^2 \frac{ds}{p}}$$

d) Sous-partition

Admettons que nous avons fait une première partition en α éléments, puis qu'ensuite, nous avons effectué sur chaque élément une partition en β éléments. Appelons n_i le nombre d'événements dans l'élément de la première partition et n_{ij} celui dans l'élément j obtenu après la seconde partition à partir de l'élément i de la première. Appelons par p_i la probabilité associée à i , p_{ij} celle associée à ij et telle que $\sum_j p_{ij} = 1$ et P_{ij} celle également associée à ij et telle que $\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$, nous avons naturellement $p_{ij} = P_{ij}/p_i$ et de ce fait nous avons la relation suivante:

$$\sum_i \sum_j n_{ij} \log P_{ij} = \sum_i n_i \log P_i + \sum_i \sum_j n_{ij} \log p_{ij}.$$

Nous voyons que pour effectuer le test en $\alpha \beta$ éléments nous pouvons le faire à partir de la partition en α éléments, en effectuant le test sur chaque partition en β éléments; ceci nous permet de localiser avec plus de sûreté l'incompatibilité d'une forme mathématique.

e) Condition de distinction

d'un ensemble de distributions $n_{i\lambda}$

Considérons une série de distributions $n_{i\lambda}$ nous voulons savoir s'il peut exister une distribution p_i compatible avec l'ensemble des $n_{i\lambda}$ en l'absence de toute hypothèse sur les p_i : Nous devons avoir quelque soit λ :

$$\begin{aligned} \sum_i n_{i\lambda} \log p_i &\sim \sum_i n_{i\lambda} \psi(n_{i\lambda} + 1) - N_\lambda \psi(N_\lambda + K) \\ &= A_\lambda \text{ avec } N_\lambda = \sum_i n_{i\lambda}. \end{aligned}$$

L'addition de plusieurs distributions de Bernoulli correspondant aux mêmes paramètres étant également une distribution de Bernoulli de même para-

mètre p_i , nous devons avoir

$$\sum_i n_i \log p_i \sim \sum_i n_i \psi(n_i + 1) - N \psi(N + K) = A$$

avec $n_i = \sum_\lambda n_{i\lambda}$ et $N = \sum_\lambda N_\lambda$

Nous aurons donc: $A - \sum_\lambda A_\lambda \sim 0$

avec $\sigma^2(A - \sum_\lambda A_\lambda) \leq \sigma^2(A) + \sum_\lambda \sigma^2(A_\lambda)$

La relation précédente est indépendante des paramètres p_i . Il ne sera pas nécessaire d'imposer une relation entre les p_i pour déterminer si les distributions $n_{i\lambda}$ correspondent à deux formes différentes.

III. Loi de distribution de toutes les étoiles

a) Introduction

Nous étudierons tout d'abord la loi projetée sur un axe, nombre d'étoiles située à une distance r du centre, puis nous étudierons la structure à deux dimensions: ellipticité, écarts au processus de Bernoulli (groupements)

De nombreux auteurs ont proposé des lois de distribution pour un amas globulaire; la densité centrale semblant être finie, les modèles adaptés se comportent dans la région centrale comme un gaz isotherme; puisque nous ne nous intéressons qu'à cette région nous étudierons donc l'hypothèse d'une loi isotherme ainsi que celle de Plummer (1915).

b) Loi isotherme

Nous admettons que la distribution des étoiles au centre suit une loi; $p = p_c \exp(-\Psi(\lambda r))$ $\Psi(x)$ étant la fonction isotherme tabulée par Chandrasekhar et Wares (1949).

Nous obtenons $\lambda = 0,039$ avec $\sigma^2(\lambda) = 0,007$. Avec $K = 90$ le test nous donne:

$$\sum n \log(K + N) p_\lambda = 1400,5$$

$$\sum n \psi(n + 1) + \frac{N}{2(K + N)} = 1403,4 \quad \sigma = 20,5$$

L'hypothèse d'isothermie est donc très plausible pour le centre de l'amas et pour la mettre en cause il nous faut étudier la répartition d'un plus grand nombre d'étoiles. De même l'hypothèse d'un processus ponctuel indépendant, hypothèse qui nous a amené à considérer les processus de Bernoulli, est aussi fort plausible.

Si nous tenons compte de l'échelle (1 mm $\sim$ 1'') et du module de distance de l'amas, que nous prenons égal à 14,66, λ correspond à une distance $R \cong 1,46$ pc.

S'il y a équipartition de l'énergie, nous devons avoir :

$$R^2 = \frac{\left\langle \frac{I}{2} m v^2 \right\rangle}{4\pi G \rho_c \langle m \rangle}$$

ρ_c étant la densité centrale

$$\text{d'où } \rho_c \sim \frac{1}{8\pi G} \frac{\langle v^2 \rangle}{R^2} = 4,5 \langle v^2 \rangle M_\odot/\text{pc}^3$$

$\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ étant de l'ordre de 5 à 10 km/s, la densité centrale est donc que quelques centaines de $M_\odot/\text{pc}^3$.

Ce calcul n'a de sens que si l'hypothèse d'isothermie est satisfaite. Si la distribution isotherme est compatible avec l'observation, cela ne signifie pas que cela soit la seule; c'est la raison pour laquelle nous avons également testé la loi de Plummer.

c) Test de la loi de Plummer

Dans ce cas $p_a(r)$ est de la forme;

$$\frac{r/(a^2 + r^2)^2}{\int_0^R \frac{r}{(a^2 + r^2)^2} dr}$$

Si R est le rayon du champ observé, le maximum est atteint pour $a = 69$, $\sigma(a) = 10$. Le test nous donne $\sum n \log(K + N) p_a = 1404,1$ le second membre du test étant bien sûr le même que dans le cas précédent.

La loi de Plummer est donc tout aussi plausible que la distribution isotherme pour la région étudiée; le nombre d'étoiles n'est pas assez grand pour conclure sur une différence pour la distribution centrale donnée par ces deux lois.

d) Ellipticité

Shapley (1930) donne pour M13 une ellipticité variable du centre au bord de l'amas, et de l'ordre de 0,95. Selon une étude récente de Kadla (1966), elle serait de $0,910 \pm 0,009$ à 1'34 du centre et $0,891 \pm 0,007$ à 3'16. Ce travail a été fait à partir de la distribution des éclaircissements et non des dénombrements. Cette dernière méthode donne généralement des écarts quadratiques très grands.

Nous avons découpé l'amas en 20 secteurs et nous avons déterminé le nombre d'étoiles dans chacun. Nous avons testé l'hypothèse d'une constance de ce nombre à l'aide du test du χ^2 ainsi que celui basé sur les processus de Bernoulli. Pour les deux tests,

l'hypothèse d'une distribution circulaire est plausible. Mais nous pouvons déterminer une ellipticité $e = 0,90 \pm 0,05$ pour un rayon de 2' ce qui est conforme au résultat de Kadla, l'écart quadratique étant nettement plus important.

La distribution circulaire étant plausible, nous pouvons représenter notre distribution d'étoiles à deux dimensions sous la forme;

$$\rho(x, y) = A(x^2 + y^2 + a^2)^{-2}$$

Ceci va nous permettre de tester l'existence d'écarts au processus de Bernoulli, écarts que nous n'avons pas pu mettre en évidence précédemment car s'ils existent, ils disparaissent lorsqu'on projette toutes les étoiles sur un même axe.

e) Écarts au processus de Bernoulli

Nous avons considéré un carré centré au centre de l'amas et de $\sim 234''$ de côté; nous l'avons découpé en carrés de 6''5, 13'', 26'', 39'' de côté.

Nous déterminerons pour chaque partition les quantités;

$$A = \sum n_i \log(K + N) p_i \text{ et } B = \sum n_i \psi(n_i + 1) + \frac{N}{2(K + N)}$$

Les p_i sont calculés à partir de la loi de Plummer.

Les résultats obtenus sont portés sur le Tableau 1. En tenant compte du fait qu'il n'y a pas indépendance totale d'une partition à une autre, à cause de la propriété de sous-partition que nous avons mentionné, l'écart entre A et B pour les partitions correspondant respectivement à 13'' et 6''5 ont une différence algébrique d'environ 30 avec un écart quadratique moyen d'environ 8.

Si l'on admet que pour les grands pas, la forme est compatible, il existe une probabilité supérieure à 0,999 pour que la forme de la loi de distribution ne corresponde pas pour un pas d'échantillonnage de 6''5. Nous avons vérifié, par ailleurs que la forme de la loi projetée sur un axe, était compatible pour un pas plus petit et que la distribution pouvait être con-

Tableau. Test pour déterminer l'écart au processus de Bernoulli

Pas	$\sum n \log(K + N) p_i$	$\sum n_i \psi(n_i + 1) + \frac{1}{2} \frac{N}{K + N}$	σ
39''	2210	2205	4
26''	1693	1691	4,2
13''	918,52	910	10,5
6''5	431	453	16

sidérée comme circulaire. Cette non-compatibilité ne peut donc être attribuée qu'à un effet de groupements, ceux-ci se superposant lorsqu'on considère la loi à une dimension.

IV. Conclusion

L'existence de groupements posent un problème théorique délicat. Pour un amas galactique il n'est pas étonnant de trouver une structure irrégulière, mais celle-ci est détruite par les chocs. La section efficace d'un groupe d'étoiles étant nettement plus grande que celle d'une étoile simple, le temps de relaxation est plus faible, bien inférieur à l'âge de M 13. Ces groupements ne doivent probablement pas être un reste de la structure initiale de l'amas.

Dans le modèle homologique de Hénon (1962) il y a accumulation d'énergie négative sans augmentation du nombre d'étoiles, l'auteur proposait une formation d'étoiles doubles ou multiples au centre: l'existence d'un écart à la distribution de Bernoulli va dans le sens d'une augmentation d'énergie potentielle sans augmentation de masse.

Un amas globulaire est un système autogravitant et il n'est pas du tout sûr que la loi de distribution des étoiles d'un tel système soit gérée par un processus de Bernoulli. Il serait très intéressant de déterminer les corrélations d'étoiles à partir de calculs numériques, selon les conditions expérimentales, afin d'accéder aux paramètres physiques pouvant intervenir.

L'existence de cette corrélation a une conséquence extrêmement importante du point de vue dynamique, c'est le supplément d'énergie potentielle qu'elle

confère au système et lors de l'application du théorème du viriel, pour déterminer la stabilité d'un amas, il est nécessaire d'en tenir compte.

Bibliographie

- Alpern, M., Bijaoui, A., Duchesne, M. 1966, *Advances in electronics and electron physics* **22A**, p. 5. Eds. J. D. MacGee, D. MacMulland and E. Kahan, Academic Press, London et New York.
- Bijaoui, A., Dantel, M. 1970, *Astr. Astrophys.* **6**, 51.
- Chandrasekhar, S., Wares, G. W. 1949, *Ap. J.* **109**, 551.
- Cosson, M. 1964, Diplôme d'études supérieures, Paris.
- Duchesne, M., Bijaoui, A. 1970 *Nouv. Rev. opt. app.* **1**, 287.
- Hénon M. 1961 *Ann. Astrophys.* **24**, 369.
- Kadla, Z. I. 1966, *Astr. Zhur.* **4**, 124.
- Kron, G. E., Mayall, N. U. 1960, *A. J.* **65**, 581.
- Kron, G. E., Papiashvili, I. I. 1967, *P. A. S. P.* **79**, 9.
- Lallemant, A. 1967, *Vistas in Astronomy*, **11**, 119. Ed. A. Beer, Pergamon Press.
- Lallemant, A., Canavaggia, R., Amiot, F. 1966, *C. r. Acad. Sci. Paris* **262**, 838.
- Lallemant, A., Duchesne, M. 1951, *C. r. Acad. Sci. Paris* **223**, 305.
- Plummer, H. C. 1915, *M. N. R. A. S.* **76**, 107.
- Shannon, C. E., Weaver, W. 1949, *The Mathematical theory of communication*, University of Illinois Press.
- Shapley, A. 1930, *Star Clusters*, McGraw-Hill, New York.
- Vernier, P. 1958, Thèse Paris.
- Walker, M. F., Kron, G. E. 1967, *P. A. S. P.* **79**, 551.
- Wlérick, G. 1969, *Advances in electronics and electron physics* **28 B**. Eds. J. D. MacGee, D. MacMullan, E. Kahan and B. L. Morgan, Academic Press, London.

A. B. Bijaoui
Observatoire de Paris
61, Avenue de l'Observatoire
F-75 Paris 14e France

Printed in Germany by Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

A European Journal

Reprint from
Vol. 13 (1971) pp. 232-236
Printed in Germany

Étude électronographique du centre de l'amas globulaire M 13. II

A. B. Bijaoui

Published by Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York
on behalf of the Board of Directors

Étude électronographique du centre de l'amas globulaire M 13. II

A. B. BIJAOUT

Observatoire de Paris et Observatoire de Haute Provence

Reçu le 29 janvier, révisé le 25 mars 1971

Electronographic Study of the Globular Cluster M 13. II

We study the variations in the distribution law of the central stars in the globular cluster M 13 as a function of magnitude. We show that the mean distance to the centre is statistically different for different magnitudes. By a statistical test related to the Bernoulli process, we show that the distribution of the positions for each group of stars cannot correspond to the same mean law. We determine apparent masses assuming thermodynamic equilibrium. The stars of the horizontal branch have the highest apparent mass, in contradiction with the results obtained by other methods. We interpret this fact in terms of a recent mass loss from these stars.

We show, moreover, that the centre of gravity of the horizontal-branch stars is slightly different from the centre of gravity of all the stars, with a probability equal to 90%. We think that this difference is due to the galactic tide, whose influence depends on the stellar concentration. We determine the distance to the galactic centre as 500 pc. The cluster, passing close to the galactic centre, is subjected to a large perturbation during a very short time (equivalent to a percussion). Comparing the oscillation time of the cluster with the relaxation time and the rotation time around the galactic centre, we find that the centre of gravity can oscillate around the mean centre of gravity.

Key words: globular clusters — stellar statistics

Dans un article précédent (I) nous avons étudié la distribution des étoiles de l'amas globulaire M 13, sans tenir compte des magnitudes. Nous nous intéresserons ici aux différences de répartition des étoiles selon leur luminosité.

Selon Shapley (1930) l'indice de couleur de l'amas varie du centre au bord; ceci ne peut donc être qu'en relation avec une variation de la fonction de luminosité avec la distance au centre. Pourtant King (1962) a montré que, pour cet amas, les distributions des étoiles «rouges» et «bleues» étaient statistiquement identiques. Grâce à l'absence de diffusion dans la gélatine, la partie centrale est mieux résolue pour les clichés électroniques, ce qui permet de tester avec plus de sûreté l'existence d'une différence.

Nous étudierons la variation de la loi de répartition en fonction de la magnitude; il existera un effet de mélange entre les étoiles de la branche horizontale (B. H.) et les sous-géantes. Nous n'avons pas dans le champ étudié d'étoile étalon, les magnitudes seront donc relatives.

I. Variation de la loi de distribution en fonction de la luminosité

a) Variation de la distance moyenne au centre

Nous avons répartis les étoiles en 5 groupes d'intervalle 0,5 mag, le 6ème comprenant les étoiles plus faibles que celles du 5ème groupe.

Pour chaque groupe i nous avons :

$$R_i = \Sigma \frac{r_{ij}}{N_i} \quad \sigma^2(R_i) = \frac{I}{N} \left(\frac{\Sigma r_{ij}^2}{N} - R_i^2 \right)$$

d'après les propriétés d'un processus de Bernoulli et en désignant par r_{ij} la distance au centre de la $j^{\text{ème}}$ étoile du groupe i , par N_i le nombre d'étoiles de ce groupe, par R_i la distance moyenne au centre, et par $\sigma^2(R_i)$ sa variance.

Les résultats obtenus sont résumés sur la figure 1. nous avons ;

$$\bar{R} = 63'' , \quad \Sigma \frac{(R_i - \bar{R})^2}{\sigma^2(R_i)} = 13,15 .$$

Le résultat est significatif avec un seuil des probabilités négligeables d'environ 2%.

b) Test basé sur les processus de Bernoulli

Dans notre article précédent, nous avons montré que pour qu'une série de distribution $n_{i\lambda}$, correspondant aux mêmes paramètres p_i , il faut que:

$$A - \sum A_\lambda \sim 0$$

$$\sigma^2(A - \sum A_\lambda) \leq \sigma^2(A) + \sum \sigma^2(A_\lambda)$$

avec

$$A_\lambda = \sum_i n_{i\lambda} \psi(n_{i\lambda} + 1) - N_\lambda \psi(N_\lambda + K)$$

$$A = \sum_i N_i \psi(N_i + 1) - N \psi(N + K)$$

$$\sigma^2(A_\lambda) = \sum_i n_{i\lambda}^2 \psi'(n_{i\lambda} + 1) - N_\lambda^2 \psi'(N_\lambda + K)$$

$$\sigma^2(A) = \sum_i N_i^2 \psi'(N_i + 1) - N^2 \psi'(N + K)$$

$$N_i = \sum_\lambda n_{i\lambda} \quad N = \sum_i N_i$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad K = \text{dimension.}$$

Sur le Tableau 1, nous avons porté les résultats obtenus pour différentes valeurs de K . Pour $K = 15$, la probabilité que l'hypothèse d'identité de distribution soit plausible est de l'ordre de 0,01, le test étant effectué sur les cinq premiers groupes.

Tableau 1. Test pour mettre en évidence une différence de répartition en fonction de la magnitude

K	E	σ
3	-5,12	2
5	-6,22	3,14
6	-7,4	3,75
9	-5,70	4,37
15	-15	5,7
18	-14,25	6,13

Nous pouvons conclure qu'en dehors de tout modèle il existe une différence entre les distributions de chaque groupe. L'hypothèse la plus simple consiste à l'interpréter comme étant due à une différence entre les masses des étoiles.

c) Détermination des masses apparentes

Dans l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique si ρ est la densité de matière et μ la masse relative d'un groupe d'étoiles, la densité d'étoiles de

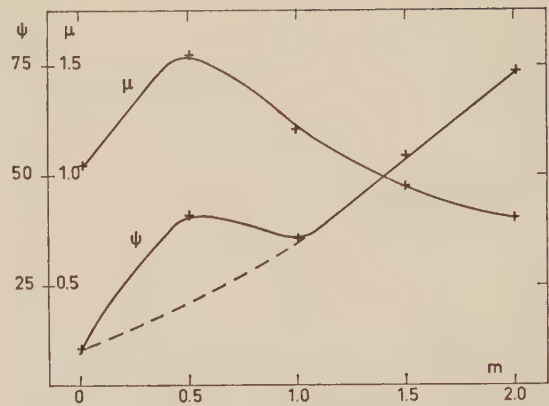


Fig. 1. Variation de la distance moyenne des étoiles au centre en fonction de la magnitude. Les magnitudes sont déterminées à une constante près

ce groupe sera proportionnelle à ρ^μ . La loi de Plummer étant compatible au centre, nous aurons dans l'espace:

$$\rho_\mu = A (a^2 + r^2)^{-\frac{5\mu}{2}}$$

d'où la loi projetée:

$$\rho_{p\mu} = B (a^2 + r^2)^{-\left(\frac{5\mu-1}{2}\right)}.$$

C'est cette loi que nous avons testée pour chaque groupe.

Tableau 2. Valeur de la masse apparente en fonction de la magnitude

$$B = \sum n_i \psi(n_i + 1) + \frac{N}{2(N + K)}$$

$$A = \sum n_i \log(K + N) p_i$$

Groupe	N	μ	$\sigma(\mu)$	A	B	$\sigma(B)$
1	11	1,06	0,84	1,54	4,65	8,1
2	41	1,56	0,45	21,57	27,8	8,8
3	36	1,23	0,48	12,93	19,22	5
4	55	0,96	0,39	29,64	44,58	6,4
5	74	0,82	0,34	47,37	57,75	7,4
6	425	0,83	0,14	775,25	761	19,7

Sur le Tableau 2, nous avons porté les résultats obtenus, nous pouvons constater que:

1 — D'une manière générale les formes des courbes correspondent mal avec les données. Ceci est peut-être dû à la façon dont les étoiles sont réparties dans les groupes; il peut exister des mélanges importants de population.

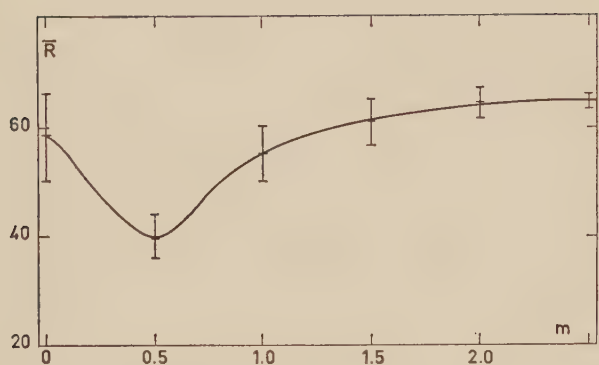


Fig. 2. Variations comparées de la masse apparente et de la fonction de luminosité en fonction de la magnitude

2 — Les écarts entre les différentes valeurs de μ , même s'ils sont légèrement supérieurs aux écarts quadratiques moyens révèlent, une tendance, pour le deuxième groupe à avoir une masse apparente plus importante.

Sur la Fig. 2, nous avons comparé les valeurs de μ ainsi déterminés, avec la fonction de luminosité; il existe un lien très net entre ces deux fonctions, le pic de la fonction de luminosité — dû aux étoiles de la branche horizontale — se trouve à la même magnitude que le pic de la fonction de masse.

L'effet de mélange étoiles de la B.H.-sous-géantes intervient de la même manière pour les deux fonctions.

L'allure des deux courbes nous amènent à ce que ce sont les étoiles de la B.H. qui ont la plus forte masse apparente.

d) Interprétation

Par plusieurs méthodes, on a pu déterminer la masse des étoiles de la B.H. et elle est de l'ordre de $0,6 M_{\odot}$; la masse que nous avons obtenue ne peut donc pas être la masse réelle des étoiles. La masse apparente n'a de sens que lorsqu'il y a équipartition de l'énergie. Pour ce groupe d'étoiles il apparaît donc qu'il n'y a pas équipartition de l'énergie.

Le calcul du temps de relaxation est complexe, les valeurs données pour M13 $\sim 5 \cdot 10^8$ ans. (King, 1962) sont beaucoup plus faibles au centre que l'âge généralement estimé. Ce calcul dépend principalement de l'écart quadratique moyen des vitesses. S'il existe un important mouvement d'ensemble (contraction, rotation...) l'écart quadratique estimé des vitesses serait plus grand qu'il ne l'est en réalité, le temps de relaxation serait totalement modifié.

Néanmoins la densité centrale étant liée à l'écart quadratique moyen des vitesses, cette quantité admet une limite inférieure plausible. Il n'est pas possible d'arriver ainsi à la limite de l'âge de l'amas estimé ($12 \cdot 10^9$ ans Iben Jr., 1970) il semble également très difficile de mettre en cause la valeur de l'âge estimé des amas globulaires, bien que cette quantité ait subi des modifications ($22 \cdot 10^9$ Sandage, 1961 à $12 \cdot 10^9$ ans).

Les étoiles de la B.H. sont donc des étoiles relativement lourdes ($1 M_{\odot} < \text{masse} < 1,44 M_{\odot}$) ayant perdue une fraction de leur masse.

Castellani *et al.* (1969) ont été également amenés à l'hypothèse de perte de masse pour les étoiles de la B.H. Mais compte tenu de la valeur du temps de relaxation ($5 \cdot 10^8$ ans) cette perte de masse se serait faite dans un passé très récent. Dans ces conditions, on doit admettre que, à moins que l'amas M13 soit un cas très particulier, tous les amas globulaires ont sensiblement le même âge; ceci est en total accord avec, d'une part, la théorie de Peebles et Dicke (1968) sur la formation des amas globulaires et, d'autre part, avec les résultats provenant des études des diagrammes H.R. des amas.

Ceci nous montre tout l'intérêt qu'il y a d'étudier les amas globulaires d'autres systèmes, tels les nuages de Magellan. Les récents travaux de Walker (1970) vont dans le sens d'une différenciation fondamentale entre ces amas et ceux de notre galaxie et l'absence de branche horizontale en est un des aspects.

II. Centre de gravité

a) Centre de gravité général

Sur un cliché de l'amas surexposé la position du centre semble très bien déterminée, mais sur les clichés étudiés la position du centre semble incertaine or, pour toute détermination de la fonction de répartition des astres, il est essentiel de connaître de façon très précise la position de ce centre.

Nous avons défini ce point comme étant le barycentre de toutes les étoiles contenues à l'intérieur d'un cercle centré en ce point. Toutes les étoiles étant affectées du même poids, ce centre n'est peut être pas le centre dynamique de l'amas, toutes les étoiles n'ayant pas une même masse, mais ce point en est beaucoup plus proche que celui que l'on obtient en exposant fortement car, dans ce cas, ce sont les étoiles les plus brillantes qui jouent un rôle essentiel.

*b) Décalage du centre de gravité
des étoiles du 2ème groupe*

Généralement les centres de gravité coïncident compte tenu de l'incertitude, mais pour le second groupe (étoiles de la B.H. et sous-géantes) il existe un écart relativement important. Nous trouvons qu'il y a donc une chance sur 10 pour que les centres de gravité soient physiquement confondus. Il nous semble que, seule la marée galactique peut amener un décalage et nous allons calculer son effet.

c) Effet du potentiel galactique

Pour chaque astre de masse m_i , l'accélération est :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = G \sum \frac{M_j (x_i - x_j)}{d_{ij}^3} + \gamma_{x_i}$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = G \sum \frac{m_j (x_i - x_j)}{d_{ij}^3} + \gamma_{y_i}$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = G \sum \frac{m_j (x_i - x_j)}{d_{ij}^3} + \gamma_{z_i}$$

(x_i, y_i, z_i) étant les coordonnées de la i ème des étoiles, d_{ij} la distance de l'étoile i à l'étoile j , γ_{x_i} , γ_{y_i} , γ_{z_i} , les composantes de l'attraction galactique au point (x_i, y_i, z_i) .

L'accélération du centre de gravité du groupe α sera pour la coordonnée x par exemple :

$$\Gamma_{G_\alpha} = \frac{G}{N_\alpha} \sum \sum \frac{(x_i - x_j)}{d_{ij}^3} m_j + \frac{1}{N_\alpha} \sum \gamma_{x_i}.$$

La force agissant sur le centre de gravité G_α , se décompose d'une part en une force de rappel (force de cohésion) due aux autres étoiles de l'amas, d'autre part en une force due au potentiel galactique. Celle-ci est la moyenne des forces dues à la marée galactique et non la force de cette marée au centre de gravité. Si $f_\alpha(x)$ désigne le nombre d'étoiles de coordonnée x pour le groupe α nous avons, si le repère a pour origine le centre de gravité du groupe α :

$$\gamma_{x_\alpha} = \gamma_{G_\alpha} + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} \gamma''_{G_\alpha} \quad \text{avec} \quad \sigma_\alpha^2 = \frac{\int x^2 f_\alpha(x) dx}{\int f_\alpha(x) dx}$$

γ_{x_α} étant l'accélération du centre de gravité du groupe α : pour deux groupes d'étoiles ayant des σ^2 différents, la force due à la marée galactique sera différente; la marée galactique aura donc pour conséquences d'éloigner les centres de gravité des deux groupes. A cause de l'existence de la force de cohésion le centre de gravité de l'ensemble d'une valeur dépendant de σ_α^2 . Pour calculer ce décalage il nous faut déterminer la valeur de la force de cohésion.

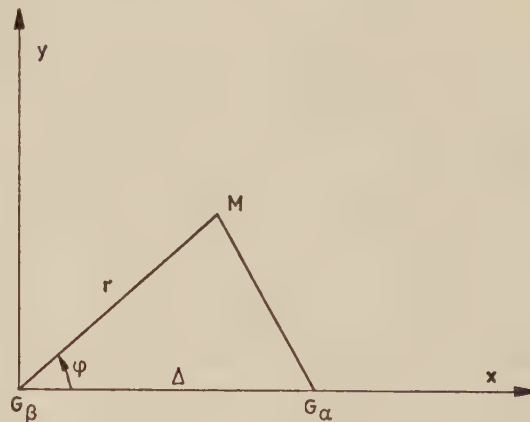


Fig. 3. Notations pour le calcul de la force de cohésion

d) Calcul de la force de cohésion

Pour déterminer la valeur de cette force F , nous supposons que la densité dans l'espace varie avec la distance au centre r pour les étoiles du groupe α selon la loi :

$$\rho_\alpha = A (r^2 + a^2)^{-5/2}$$

et pour l'ensemble des autres étoiles (groupe β) :

$$\rho_\beta = B (r^2 + a^2)^{-5/2}.$$

Nous ne tiendrons pas compte d'une différence dans les concentrations pour calculer la force de cohésion.

Le centre de gravité du groupe β est l'origine des coordonnées et dans ce repère le centre de gravité du groupe α a pour coordonnées $(\Delta, 0, 0)$. Les notations sont portées sur la Fig. 3. Si $M_\beta(r)$ est la masse contenue dans la sphère de rayon r centrée à l'origine des coordonnées pour le groupe β nous avons :

$$F = -G \iiint \rho_\alpha(x, y, z) \frac{\cos \varphi}{r^2} dx dy dz M_\beta(r).$$

Nous obtenons au premier ordre en Δ :

$$F = -\frac{15\pi}{512} \frac{GM_\alpha M_\beta}{a^3} \Delta.$$

e) Valeur de l'écart

En faisant $\gamma_{G_\alpha} = \gamma_{G_\beta}$, nous obtenons

$$\Delta = \gamma''_{G_\alpha} \frac{256 a^3}{15 \pi G M_i} (\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2).$$

La force de rappel étant de la forme $K\Delta$ il existe une constante de temps T . Si ρ_c est la densité centrale exprimée en masses solaires par parsecs cube,

nous trouvons pour $T = 1,5 \varrho_c^{-1/2} 10^8$ ans. Avec une densité centrale de l'ordre de $100 M_\odot/\text{pc}^3$, nous trouvons une constante de temps d'environ $15 \cdot 10^6$ années. Cette constante de temps est tout à fait compatible avec le temps de la rotation de l'amas dans la galaxie et le temps de relaxation.

Si R désigne la distance de l'amas au centre galactique en première approximation nous avons:

$$\gamma'' = \frac{6 GM}{R^4} \quad \text{galaxie}$$

avec $M_G = 2 \cdot 10^{11} M_\odot$, $\varrho_c = 200 M_\odot/\text{pc}^3$

$$\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2 = 2,9 p^2 c, \quad \Delta = 0,65 \text{ pc.}$$

Nous trouvons $R = 4,3 \cdot 10^2 \text{ pc}$.

En associant le décalage trouvé à cet effet nous trouvons donc une distance au centre de la galaxie extrêmement faible et totalement fautive. Le décalage trouvé ne peut être dû à un effet de la marée galactique sur l'amas à la position actuelle de l'amas.

Conclusion

La distance R déterminée suggère que l'effet se produit au moment où l'amas passe près du centre de la galaxie. Dans ce cas pendant un temps très bref, il s'exerce une force très grande sur le centre de gravité des étoiles du groupe considéré (équivalent à

une percussion), ensuite ce centre va osciller avec une constante de temps de l'ordre de $15 \cdot 10^6$ ans: le temps de relaxation étant supérieur au temps de rotation de l'amas dans la galaxie, l'effet d'oscillation va pouvoir se conserver pendant toute la durée de cette rotation, et à chaque tour le centre de la galaxie perturbe à nouveau l'amas.

Pour que cela ait un sens il est nécessaire que la trajectoire de M13 passe près du centre de la galaxie c'est-à-dire que l'orbite de l'amas soit très excentrique ce qui est en accord avec les études faites sur la dynamique de ces astres (von Hoerner, 1955).

Bibliographie

- Castellani, V., Giannone, P., Renzini, A. 1969, *Astr. Spa. Sci.* **3**, 518.
 Iben, I. jr. 1970, *Scient. Am.* **223**, 26.
 King, I. 1962, *Ap. J.* **136**, 784.
 Peebles, P.J.E., Dicke, R.H. 1968, *Ap. J.* **154**, 891.
 Sandage, A.R. 1961, *A. J.* **66**, 53.
 Shapley, H. 1930, *Star Clusters*, McGraw-Hill, New York, p. 31.
 Hoerner, S. von 1955, *Z. Astrophys.* **35**, 255.
 Walker, M.F. 1970, *Ap. J.* **161**, 835.

A. B. Bijaoui
 Observatoire de Paris
 61, Avenue de l'Observatoire
 F-75 Paris 14e, France

